XV МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий регионального этапа и критерии оценивания, 1 день

1. *Два бегуна бегают с равными постоянными скоростями по диагоналям AC и BD соответственно квадрата ABCD. Добежав до конца диагонали, бегун сразу поворачивает обратно. Стартовали они одновременно из двух случайно выбранных точек своих диагоналей. Докажите, что найдётся момент, когда расстояние между бегунами будет* ***строго*** *меньше половины диагонали квадрата.* (И. Рубанов)

Решение. Рассмотрим момент, когда бегун с диагонали AC находится в точке O пересечения диагоналей. Если второй бегун в этот момент не находится в точке B или D, расстояние между бегунами будет меньше половины диагонали, и задача решена. В противном случае будем считать для определенности, что второй бегун в этот момент находится в точке B, а первый движется из A в C. Поскольку скорости бегунов равны, в момент, когда первый добежит до середины E отрезка OC, второй будет в середине F отрезка BO, и расстояние $EF < EO+OF = AC/2$, что и требовалось.

Критерии. Показано, что будет момент, когда расстояние между бегунами будет *не больше* половины диагонали, дальнейшего содержательного продвижения нет: *2 балла*.

2. *Пусть p_1, p_2, ..., p_{100} — сто простых чисел, среди которых нет одинаковых. Натуральные числа a_1, ..., a_k, большие 1, таковы, что каждое из чисел $p_1p_2^3, p_2p_3^3, \ldots, p_{99}p_{100}^3, p_{100}p_1^3$ равно произведению каких-то двух из чисел a_1, ..., a_k. Докажите, что $k \geq 150$.* (И. Рубанов)

Решение. Будем называть натуральное число *белым*, если оно делится на квадрат какого-нибудь простого числа, и *черным* в противном случае. Скажем, что число a_i *обслуживает* число из списка $p_1p_2^3, p_2p_3^3, \ldots, p_{99}p_{100}^3, p_{100}p_1^3$ (*), если оно дает его в произведении с каким-либо a_j. Очевидно, что при этом одно из чисел a_i, a_j — белое, а другое — черное. Так как белое число может обслуживать не более одного числа из списка (*), *белых чисел среди a_i не менее 100*. Кроме того, если черное число обслуживает число $p_{k-1}p_k^3$, то оно равно p_{k-1}, p_k или $p_{k-1}p_k$, и потому может обслуживать не более двух чисел из списка (*). Значит, *черных чисел среди a_i не менее 50*. Таким образом, $k \geq 100+50 = 150$, что и требовалось доказать.

Критерии. То, что каждое белое число может обслуживать не более одного, а каждое чёрное — не более двух чисел из списка (*), считаем очевидным, отсутствие обоснования *оценки не снижает*.

Доказано, что среди a_i есть не менее 100 чисел, обслуживающих только одно число из списка (*), дальнейшего содержательного продвижения нет: *3 балла*.

3. *В клетках таблицы 10×10 расставлены натуральные числа 1, 2, ..., 99, 100. Назовём* ***уголком*** *фигуру, которая получается удалением одной клетки из квадрата 2×2. Назовем уголок* ***хорошим****, если число в его клетке, граничащей по сторонам с двумя другими, больше чисел, стоящих в этих двух других клетках. Каково наибольшее возможное число хороших «уголков»? »? (Каждый уголок учитывается независимо от того, как он расположен по отношению к другим, разные уголки могут частично накладываться).*А. Голованов)

Ответ. 162. **Решение**. Назовём *центром* «уголка» клетку, которая граничит по сторонам с двумя другими его клетками. Рассмотрим любой квадрат 2×2, находящийся в нашей таблице. В нём содержится 4 «уголка». При этом хорошими из них могут быть только те, в центрах которых находятся два наибольших числа из тех, что находятся в нашем квадрате 2×2. Так как каждый «уголок» находится в каком-либо квадрате 2×2, отсюда следует, что хороших уголков в нашей таблице не больше половины от их общего числа, равного 4×81, так как всего в нашей таблице имеется 81 квадрат размером 2×2 (например, потому, что левые верхние клетки всех таких квадратов образуют квадрат 9×9). Итак, мы доказали, что хороших уголков не больше, чем 4×81/2 = 162. Приведем пример, когда их ровно 162. Покрасим клетки таблицы в два цвета в шахматном порядке, и произвольным образом поставим на чёрные клетки числа от 51 до 100, а на белые — числа от 1 до 50. Легко видеть, что в этом случае в каждом квадрате 2×2 будет ровно два хороших уголка с центрами в черных клетках.

Критерии. Только ответ: *0 баллов*.

Найдено общее число «уголков» в таблице, дальнейшего содержательного продвижения нет: *0 баллов*.

Доказано, что хороших «уголков» не более половины от общего числа «уголков» в таблице, примера нет: *3 балла*.

Построен пример, когда хороших «уголков» ровно половина от общего числа, содержательного продвижения в доказательстве оценки нет: *3 балла*.

Есть описанные в двух предыдущих критериях оценка и пример, но общее число уголков в таблице не найдено или найдено неверно: *6 баллов*.

4. *На стороне AC треугольника ABC выбрана точка E. Биссектриса AL пересекает отрезок BE в точке X. Оказалось, что $AX = XE$ и $AL = BX$. Чему равно отношение углов A и B треугольника?* (С. Берлов)

Ответ. 2. **Решение**. Пусть прямая, проходящая через точку E параллельно AL, пересекает прямые BC и BA в точках P и Q соответственно. Из подобия треугольников ABL и QBP имеем $PQ/AL = BE/BX = BE/AL$, откуда $PQ = BE$. В силу параллельности прямых AL и PQ имеем $\angle AQE = \angle XAE = \angle AEQ$, откуда $AE = AQ$. Кроме того, из равенства $AX = XE$ следует, что $\angle AEB = \angle AEX = \angle XAE$, откуда $\angle AEB = \angle AQE$. Таким образом, треугольники AQP и AEB равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $AP = AB$ и $\angle BAE = \angle PAQ = 2\angle CBA$, откуда и получаем ответ.

Критерии. Только ответ: *0 баллов*.

5. *По кругу расставлено 99 положительных чисел. Оказалось, что для любых четырех стоящих подряд чисел сумма двух первых из них по часовой стрелке равна произведению двух последних из них по часовой стрелке. Чему может быть равна сумма всех 99 расставленных чисел?* (С. Берлов)

Ответ.198. **Решение**. Пусть подряд стоят числа a, b, c, d, e. Заметим, что если $a > c$, то $a+b > b+c$, откуда $cd > de$, то есть $c > e$. Продолжая это рассуждение, получим, что каждое число больше числа, идущего по часовой стрелке через одно от него. Но тогда, записав цепочку из 98 таких неравенств, начиная с какого-то числа a, получим, что $a > a$ — противоречие. Значит, все 99 расставленных чисел равны одному и тому же числу a, такому, что $2a = a^2$, откуда $a = 2$, а искомая сумма равна $2\times 99 = 198$.

Критерии. Только ответ, с примером или без: *0 баллов*.

XV МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий регионального этапа и критерии оценивания, 2 день

6. *Можно ли число 240 представить в виде суммы девяти двузначных чисел (среди которых могут быть и одинаковые), в десятичной записи каждого из которых есть девятка?* (И. Богданов)

Ответ. Нельзя. **Решение**. Допустим, можно. С девятки должно начинаться хотя бы одно слагаемое, иначе все девятки будут в разряде единиц, и сумма будет оканчиваться на 1. Это слагаемое не меньше 90, а каждое из остальных — не меньше 19. Поэтому их сумма не меньше $90+8\cdot19 = 242 > 240$. Противоречие.

Критерии. Только ответ: *0 баллов*.

7. *Внутри параллелограмма $ABCD$ отмечена точка E, лежащая на биссектрисе угла A, и точка F, лежащая на биссектрисе угла C. Известно, что середина отрезка BF лежит на отрезке AE. Докажите, что середина отрезка DE лежит на прямой CF.* (А. Кузнецов)

Решение. Пусть $\angle BAD = \angle BCD = 2\alpha$, а биссектриса AE пересекает прямую BC в точке K. Тогда $\angle BAK = \angle KAD = \alpha = \angle FCB$. Следовательно, биссектрисы углов A и C параллельны. Пусть O — середина отрезка BF. Так как по условию она лежит на AE, а $AE \parallel CF$, OK — средняя линия треугольника BFC (*). Обозначим через M точку пересечения биссектрисы CF и прямой AD и заметим, что треугольники ABK и CDM равны, так как $AB = CD$, $\angle MCD = \angle KAB = \alpha$, $\angle ABK = \angle CDM = 180°-2\alpha$. Значит, расстояние от точки D до прямой CF равно расстоянию от точки B до прямой AE, а вместе с ним, в силу (*) — расстоянию между прямыми AE и CF. Следовательно, средняя линия треугольника DEA лежит на прямой CF, откуда и вытекает утверждение задачи. **Замечание**. Доказательство станет заметно короче, если использовать симметричность параллелограмма относительно его центра.

Критерии. Параллельность биссектрис углов A и C параллелограмма считаем известным фактом.

8. *Назовем два числа* ***почти равными*** *друг другу, если они равны друг другу или отличаются друг от друга не более, чем на единицу. Клетчатый прямоугольник со сторонами, равными натуральным числам a и b, таков, что из него нельзя по линиям сетки вырезать прямоугольник, площадь которого почти равна половине площади исходного прямоугольника. Какое наименьшее значение может принимать число $|a-b|$?* (Е. Молчанов, С. Берлов)

Ответ. 4. **Решение**. Если одна из сторон прямоугольника четна, от него можно по средней линии отрезать прямоугольник вдвое меньшей площади. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда обе стороны нечетны. В этом случае $|b-a|$ четно. Если $|b-a| = 0$, то $a = b = 2n+1$, половина площади прямоугольника равна $2n^2+2n+0{,}5$, и мы можем вырезать из него прямоугольник $2n\times(n+1)$ почти равной этому числу площади $2n(n+1)$. Если $|b-a| = 2$, то $a = 2n+1$, $b = 2n-1$, половина площади прямоугольника равна $2n^2-0{,}5$, и мы можем вырезать из него прямоугольник $2n\times n$ почти равной этому числу площади $2n^2$. Таким образом, $|a-b| \ge 4$. Полагая $a = 2n+3$, $b = 2n-1$, получаем прямоугольник, половина площади которого равна $2n^2+2n-1{,}5$. Почти равны ей целочисленные площади $2n^2+2n-1$ и $2n^2+2n-2$. При $n = 3$ $2n^2+2n-1 = 23$, $2n^2+2n-2 = 22 = 2\cdot11$. Простые числа 23 и 11 больше сторон получающегося при $n = 3$ прямоугольника 9×5, поэтому вырезать из него по линиям сетки прямоугольник, площадь которого почти равна половине его площади, невозможно. Таким образом, минимальное возможное значение $|a-b|$ равно 4.

Критерии. (1) Показано только, что не годятся прямоугольники с четной стороной: *0 баллов*.

(2) Разобран один из двух случаев: $a = b = 2n+1$ или $a = 2n+1$, $b = 2n-1$: *1 балл*; разобраны оба случая: *2 балла*.

(3) Есть пример для случая $|a-b| = 4$: *2 балла* за описание примера, *1 балл* за его обоснование. Что считать достаточным обоснованием, будет уточнено по ходу проверки работ.

При отсутствии полного решения баллы за пункты (2) и (3) суммируются.

Только ответ: *0 баллов*.

9. *Будем говорить, что мы* ***укоротили*** *число, если стерли его последнюю цифру. Натуральное число, большее миллиона, таково, что если укоротить его, получится квадрат натурального числа, если укоротить этот квадрат, получится куб натурального числа, укоротив этот куб, получим четвёртую степень натурального числа, а, укоротив эту четвёртую степень, получим пятую степень натурального числа. Докажите, что если укоротить эту пятую степень, то получится шестая степень натурального числа.* (А. Кузнецов)

Решение. Пусть число после первого укорачивания равно n^2, а после третьего — m^4. Тогда $100m^4$ отличается от n^2 только двумя последними цифрами, то есть $100 \ge n^2-(10m^2)^2 = (n-10m^2)(n+10m^2) \ge 0$. Так как по условию $m^4 \ge 1000$, $10m^2 > 100$, что возможно только если $n = 10m^2$. Значит, вторая и третья цифры исходного числа — нули, и куб k^3, получающийся после третьего укорачивания, оканчивается на 0.

Следовательно, четвертая и пятая цифры исходного числа — тоже нули, и после пятого укорачивания мы получим число $(k/10)^3 = (n/100)^2$. Поскольку в разложение числа, являющегося одновременно точным квадратом и точным кубом, все простые множители входят в степенях, кратных 6, это число является точной шестой степенью.

Критерии. Показано, что вторая и третья цифры исходного числа — нули, дальнейшего содержательного продвижения нет: *3 балла*.

За использование без обоснования того факта, что число, являющегося одновременно точным квадратом и точным кубом, является и точной шестой степенью, *оценка не снижается*.

10. *На столе есть две кучки камней, в которых соответственно 100 и 101 камень. Двое играют в игру, делая ходы по очереди. За ход разрешается взять кучку, убрать из неё какое-то количество камней (хотя бы один) и разбить оставшиеся в этой кучке камни на две непустые кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто делает первый ход, или его соперник?* (М. Туревский)

Ответ. Тот, кто делает первый ход. **Решение**. Пусть первого игрока зовут Петей, а второго — Васей. Первым ходом Петя уберет из кучки 101 один камень, а оставшиеся разделит на кучки из 1 (про которую можно забыть) и 99 камней. Теперь докажем более общий факт: если на столе лежат кучки из $2k$ и $2k–1$ камней, то проигрывает тот, чья очередь ходить.

Пусть соперник Пети Вася сделал ответный ход в кучку $2k–1$ или разделил кучку $2k$ на две, взяв из нее больше одного камня. У него получились кучки из a и b камней, где $a+b \le 2k–2$. Тогда Петя следующим ходом создает две такие же кучки, получит позицию a, a, b, b и выиграет, делая ходы, симметричные ходам первого.

Пусть Вася возьмет один камень из кучки $2k$ и разделит ее на кучки из a и b камней. Тогда числа a и b будут разной четности. Пусть a четно. Тогда Петя из кучки в $2k–1$ камней получит кучки из $a–1$ и b камней (что возможно, так как $a \ge 2$), после чего мысленно разделяет игру на две: одну на паре равных кучек b, b, где он побеждает, делая ходы, симметричные ходам первого, и вторую — на паре кучек $a, a–1$, где он снова применяет стратегию, описанную выше.

Таким образом, у второго всегда есть возможность сделать ход, и он побеждает в силу того, что всего в игре можно сделать не больше 200 ходов.

Критерии. Только ответ: *0 баллов*.