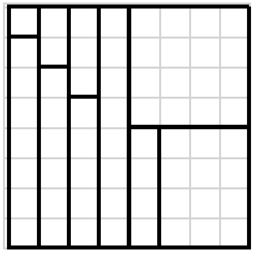
XIV МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения и критерии оценки заданий регионального этапа, 1 день

1. *Как без остатка разрезать клетчатый квадрат размером 8х8 клеточек на 10 клетчатых прямоугольников, чтобы все прямоугольники имели различные площади? Все разрезы должны проходить по границам клеточек.* (И. Рубанов)



Решение. Например, так, как показано на рисунке справа.

Критерии. Изображён или описан соответствующий условиям задачи способ разрезания: *7 баллов*.

Указаны прямоугольники, на которые действительно можно разрезать квадрат с соблюдением условий задачи, но способ разрезания не изображен и не описан: *3 балла*.

2. *Учитель придумал ребус, заменив в примере $a+b = c$ на сложение двух натуральных чисел цифры буквами: одинаковые цифры одинаковыми буквами, а разные — разными. (например, если $a = 23$, а $b = 528$, то $c = 551$, и получился, с точностью до выбора букв, ребус АБ+ВАГ = ВВД). Оказалось, что по получившемуся ребусу однозначно восстанавливается исходный пример. Найдите наименьшее возможное значение суммы c.* (И. Богданов)

Ответ. 10. **Решение**. Если ребус имеет вид А+Б = АВ, то А = 1, так как А+Б < 20, и Б = 9, так как иначе сумма А+Б — однозначное число. Таким образом, при $c = 10$ по ребусу может однозначно восстанавливаться исходный пример 1+9 = 10. Если же $c < 10$, то ребус имеет вид А+Б = В, и определить, был ли это пример 1+2 = 3, пример 1+3 = 4 или любой из десятков других подобных примеров, не удастся.

Критерии. Только ответ 10: *0 баллов*.

Дан ответ, указан вид ребуса А+Б = АВ, дальнейшего содержательного продвижения нет: *1 балл*.

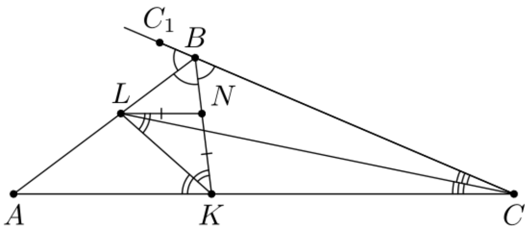
Указан вид ребуса А+Б = АВ, доказано, что он имеет единственное решение, дальнейшего содержательного продвижения нет: *3 балла*.

Показано, что ребус вида А+Б = В имеет больше одного решения, дальнейшего содержательного продвижения нет: *3 балла*.

Дан ответ, указан вид ребуса А+Б = АВ, показано, что ребус вида А+Б = В имеет больше одного решения, единственность решения ребуса А+Б = АВ не доказана: *4 балла*.

Дан ответ, указан вид ребуса А+Б = АВ, показано, что ребус вида А+Б = В имеет больше одного решения, единственность решения ребуса А+Б = АВ доказана с погрешностями: *5–6 баллов*.

3. *В треугольнике ABC проведены биссектрисы BK и CL. На отрезке BK отмечена точка N так, что $LN \parallel AC$. Оказалось, что $NK = LN$. Найдите величину угла ABC.* (А. Кузнецов)



Ответ. 120°. **Решение**. В равнобедренном треугольнике LNK $\angle KLN = \angle LKN$. Кроме того, равны углы KLN и LKA как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых LN и AC. Таким образом, $\angle KLN = \angle LKA$, то есть луч KL — биссектриса угла AKB. Следовательно, лежащая на нём точка L равноудалена от прямых KA и KB. Кроме того, она равноудалена от прямых $CA = KA$ и CB, так как лежит на биссектрисе угла ACB. Значит, точка L равноудалена от прямых CB и KB, и потому должна лежать на биссектрисе того из углов, образованных этими прямыми, в котором она содержится. Это угол KBC_1, где C_1 — точка на продолжении отрезка CB за точку B, а его биссектрисой должен быть луч $BL = BA$. Отсюда получаем, что $\angle ABC_1 = \angle ABK = \angle CBK$. Так как эти три угла вместе составляют развёрнутый угол, то каждый из них равен 60°, откуда $\angle ABC = \angle ABK + \angle CBK = 120°$.

Критерии. Показано, что KL — биссектриса угла AKB, дальнейшего содержательного продвижения нет: *1 балл*.

Показано, что точка L равноудалена от прямых CB, CA и KB (или что точка L является центром вневписанной окружности треугольника AKB), дальнейшего содержательного продвижения нет: *3 балла*.

4. *Числа 1, 2, ..., 1000 разбили на два множества по 500 чисел: красные $k_1, k_2, ..., k_{500}$ и синие $s_1, s_2, ..., s_{500}$. Докажите, что количество таких пар m и n, у которых разность $k_m – s_n$ дает остаток 7 при делении на 100, равно количеству таких пар m и n, у которых разность $s_n – k_m$ дает остаток 7 при делении на 100. Здесь рассматриваются* ***все*** *возможные разности, в том числе и отрицательные.*

Напомним, что остатком от деления целого числа a на 100 называется разность между числом a и ближайшим числом, не большим a и делящимся на 100. Например, остаток от деления числа 2022 на 100 равен 2022–2000 = 22, а остаток от деления числа –11 на 100 равен –11–(–100) = 89. (Е. Бакаев)

Решение. Выпишем на доске все числа от 1 до 1000, и будем проводить стрелку от числа a к числу b, если разность $a–b$ дает остаток 7 при делении на 100. Тогда в каждое число будет входить 10 стрелок и из каждого числа будет выходить 10 стрелок. Значит, стрелок с синим началом столько же, сколько стрелок с синим концом. Удалим все стрелки, у которых как начало, так и конец синие. Тогда получится, что стрелок с синим началом и красным концом столько же, сколько стрелок с красным началом и синим концом, что и требовалось доказать.

5. *При каком наибольшем* n *существует выпуклый* n*-угольник, у которого длины диагоналей принимают не больше двух различных значений?* (И. Рубанов)

Ответ. При $n = 7$. **Решение**. *Пример*. Правильный семиугольник. У него диагонали ровно двух видов: соединяющие вершины через одну и через две. *Оценка*. Пусть AB — сторона выпуклого многоугольника M, у которого есть диагонали только двух возможных длин x и y. Тогда для всякой вершины C, не смежной с A и B, стороны CA и CB треугольника ACB могут равняться только x и y. Выбор длин этих сторон однозначно определяет вершину C, так как она должна лежать с той же стороны от прямой AB, что и весь многоугольник M. Но таких комбинаций сторон есть только четыре: $CA = CB = x$; $CA = CB = y$; $CA = x$, $CB = y$; $CA = y$, $CB = y$. При этом из двух первых комбинаций возможна только одна, так как иначе соответствующие вершины C_1 и C_2 многоугольника M лежали бы на серединном перпендикуляре к стороне AB, что противоречило бы выпуклости M: та из вершин C_1 и C_2, которая ближе к AB, оказалась бы внутри треугольника с вершинами в A, B и другой из этих вершин. Таким образом, у многоугольника M не больше трёх вершин, не смежных с вершинами A и B, то есть всего у него не более 7 вершин.

Критерии. Только ответ 7: *0 баллов*.

Дан верный ответ и приведён пример семиугольника, длины диагоналей которого принимают только два различных значения, содержательного продвижения в доказательстве оценки нет: *1 балл*.

XIV МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения и критерии оценки заданий регионального этапа, 2 день

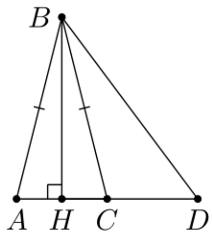
6. *Сумма остатков от деления трёх последовательных натуральных чисел на 2022 — простое число. Докажите, что одно из чисел делится на 2022.* (Н. Агаханов)

Решение. Пусть наши числа равны k, $k+1$ и $k+2$, и ни одно из них не делится на 2022. Тогда если остаток от деления числа k на 2022 равен $r > 0$, то остатки от деления на 2022 чисел $k+1$ и $k+2$ равны, соответственно, $r+1$ и $r+2$, а сумма трёх остатков равна составному числу $3r+3 = 3(r+1)$. Противоречие.
Замечание. Описываемая в условии задачи ситуация возможна. Если первое (наименьшее) из чисел делится на 2022, то числа дают соответственно остатки 0, 1 и 2 при делении на 2022, сумма которых равна простому числу 3.

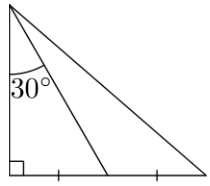
Критерии. За отсутствие объяснения, почему описываемая в условии задачи ситуация возможна, *оценка не снижается*.

Если в решении, аналогичном приведенному выше, считается, что остатки от деления на 2022 трёх последовательных целых чисел равны k, $k+1$ и $k+2$, без оговорки, что ни одно из данных чисел не делится на 2022, *оно оценивается из 4 баллов*.

7. *Существует ли треугольник, у которого длины не совпадающих между собой медианы и высоты, проведенных из одной его вершины, соответственно равны длинам двух сторон этого треугольника?* (Н. Агаханов)



Ответ. Существует. **Решение**. Возьмём треугольник ABC, где $AB = BC$ и высота BH, проведенная из вершины B, равна $2AC$ (очевидно, такой существует). На продолжении стороны AC за точку C отложим отрезок $CD = AC$. В треугольнике ABD высота BH равна стороне $AD = 2AC$, а медиана BC равна стороне AB. Другим примером служит прямоугольный треугольник, у которого медиана, проведённая из вершины острого угла, образует с катетом, выходящим из той же вершины, угол 30°.



Критерии. Только ответ «существует»: *0 баллов*.

Чертёж без обоснования: *0 баллов*. При этом следует учитывать, что роль обоснования полностью или частично могут сыграть указанные на чертеже параметры (длины и соотношения длин отрезков, величины углов и т. п.).

8. *Будем называть натуральное число* ***красивым****, если в его десятичной записи поровну цифр 0, 1, 2, а других цифр нет. Может ли произведение двух красивых чисел быть красивым?* (К. Сухов)

Ответ. Не может. **Решение**. Очевидно, количество цифр красивого числа делится на 3. Если в десятичной записи красивого числа x $3n$ цифр, то оно удовлетворяет неравенству $10^{3n-1} < x < 3\cdot10^{3n-1}$ (*). Следовательно, произведение двух красивых чисел, записываемых $3k$ и $3m$ цифрами соответственно, лежит между числами $10^{3(k+m)-2}$ и $9\cdot10^{3(k+m)-2}$, а, значит, и между степенями десятки с показателями $3(k+m)-2$ и $3(k+m)-1$. Красивое же число в силу неравенства (*) лежит между степенями десятки с показателями $3n-1$ и $3n$. Поэтому произведение двух красивых чисел не может быть красивым.

Критерии. Только ответ «не может»: *0 баллов*.

Замечено только, что в числе $3n$ цифр, дальнейшего содержательного продвижения нет: *0 баллов*.

Замечено, что в числе $3n$ цифр, выписано неравенство $10^{3n-1} < x$, дальнейшего содержательного продвижения нет: *1 балл*.

Замечено, что в числе $3n$ цифр, выписаны оба неравенства, входящих в двойное неравенство (*), дальнейшего содержательного продвижения нет: *2 балла*.

Не объяснено, почему неравенство $10^{3(k+m)-2} < x < 9\cdot10^{3(k+m)-2}$ несовместимо с неравенством (*) — *штраф в 1 балл*.

Любые не доведённые до полного решения рассуждения про расположение цифр в красивом числе (в том числе с установлением каких-либо свойств наборов последних цифр красивых чисел) *не оцениваются*.

9. *Петя и Вася написали на доске по 100 различных натуральных чисел. Петя поделил все свои числа на Васины с остатком и выписал все 10000 получившихся остатков себе в тетрадь. Вася поделил все свои числа на Петины с остатком и выписал все 10000 получившихся остатков себе в тетрадь. Оказалось, что наборы выписанных Васей и Петей остатков совпадают. Докажите, что тогда и наборы их исходных чисел совпадают.* (С. Берлов)

Решение. Пусть Петя записал числа $a_1 > a_2 > \ldots > a_{100}$, а Вася — $b_1 > b_2 > \ldots > b_{100}$. Если $a_1 > b_1$, то у Васи один из остатков будет b_1, а у Пети все остатки будут меньше b_1 — противоречие. Аналогично приводит к противоречию предположение, что $a_1 < b_1$. Значит, $a_1 = b_1$.

Допустим, мы уже доказали, что $a_1 = b_1$, …, $a_k = b_k$ для некоторого $k \geq 1$. Наборы остатков от деления друг на друга чисел a_1, …, a_k у Пети и Васи совпадают, вычеркнем все эти остатки. Если $a_{k+1} > b_{k+1}$, то у Пети среди невычеркнутых остатков есть k чисел a_{k+1} — остатки от деления Петиного числа a_{k+1} на все большие Васины числа, а у Васи все невычеркнутые остатки меньше a_{k+1}, так как там либо делимое меньше a_{k+1}, либо делитель не превосходит a_{k+1}. Аналогично разбирается случай, когда $a_{k+1} < b_{k+1}$. Поэтому $a_{k+1} = b_{k+1}$. Последовательно проводя это рассуждение для $k = 1, 2, \ldots, 99$ (а знакомые с методом математической индукции сразу оформят его как индукционный переход), мы докажем утверждение задачи.

Критерии. Доказано, что у Васи и Пети равны наибольшие числа, дальнейшее содержательное продвижение отсутствует: *2 балла*. Рассуждение типа «аналогично доказывается совпадение двух следующих чисел и т. д.» содержательным продвижением не является, поскольку доказательство дальнейших совпадений требует существенной модификации доказательства совпадения двух наибольших чисел.

10. *В вершины правильного 100-угольника поставили 100 фишек, на которых написаны номера 1, 2, …, 100, именно в таком порядке по часовой стрелке. За ход разрешается обменять местами некоторые две фишки, стоящие в соседних вершинах, если номера этих фишек отличаются не более чем на k. При каком наименьшем k серией таких ходов можно добиться расположения, в котором каждая фишка сдвинута на одну позицию по часовой стрелке по отношению к своему начальному положению?* (С. Берлов)

Ответ. 50. **Решение**. *Пример*. Фишку 50 последовательно 99 раз меняем со следующей против часовой стрелки. *Оценка*. Рассуждаем от противного. Пусть $k < 50$. Будем считать сдвиги фишек относительно их начальных позиций, причем сдвиг по часовой стрелке считаем с плюсом, против часовой — с минусом. Тогда при обмене двух фишек к сдвигу одной из них прибавляется 1, а из сдвига другой вычитается 1. Пусть после нескольких ходов все фишки сместились на одну позицию по часовой стрелке. Тогда полный сдвиг фишки с номером k равен $100t_k+1$, где t_k — число полных оборотов этой фишки (обороты по часовой стрелке считаются со знаком плюс, а против часовой — со знаком минус). Так как $k < 50$, фишки с номерами 1 и 51 не могли меняться местами, и потому совершили одинаковое число полных оборотов, то есть $t_1 = t_{51}$. Аналогично, $t_2 = t_{52}$, …, $t_{50} = t_{100}$. Поэтому сумма всех сдвигов всех фишек равна $100(2t_1+\ldots+2t_{50}+1)$. Она должна быть равна 0, так как равна 0 сумма сдвигов при каждом ходе. Но она не равна 0, так как сумма в скобках нечетна. Противоречие.

Критерии. Только верный ответ: *0 баллов*.

Баллы за пример и оценку суммируются.

Дан верный ответ, приведен верный пример, продвижения в доказательстве оценки нет: *2 балла*.

Ответ и доказанная оценка, примера нет: *4 балла*.

Замечено, что сумма ориентированных сдвигов фишек относительно их начальных расположений равна 0, других содержательных продвижений нет (наличие ответа при отсутствии примера содержательным продвижением не считается): *1 балл*.